**Chủ đề**

4

**CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH**

**ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC**

# **D.** **CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC**

**MỤC LỤC**

[D. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC 1](#_Toc535094181)

[🗁. LÝ THUYẾT CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC 3](#_Toc535094182)

[A. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU 3](#_Toc535094183)

[Phương pháp 1: Hai tam giác bằng nhau 3](#_Toc535094184)

[Phương pháp 2: Sử dụng tính chất của các hình đặc biệt 6](#_Toc535094185)

[Phương pháp 3: Sử dụng tính chất của các đường đặc biệt, điểm đặc biệt. 7](#_Toc535094186)

[Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất liên quan đến đường tròn. 8](#_Toc535094187)

[Phương pháp 5: Sử dụng tỉ số, đoạn thẳng trung gian … 9](#_Toc535094188)

[B. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ 10](#_Toc535094189)

[1. Tính chất trung điểm của đoạn thẳng 10](#_Toc535094190)

[3. Đường trung bình. 10](#_Toc535094191)

[4. Định lý Talet: 11](#_Toc535094192)

[5. Tính chất đường phân giác của tam giác. 12](#_Toc535094193)

[6. Các trường hợp đồng dạng của tam giác 13](#_Toc535094194)

[7. Hệ thức lượng trong tam giác vuông. 14](#_Toc535094195)

[8. Tỉ số lượng giác của góc nhọn. 15](#_Toc535094196)

[🗁. PHẦN BÀI TẬP. 16](#_Toc535094197)

Trong bài hình học trong đề thi tuyển sinh vào 10, sẽ có những yêu cầu chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau hoặc các đoạn thẳng tỷ lệ mà ta gọi chung là đẳng thức hình học.

Chủ đề dưới đây sẽ hệ thống một số biện pháp chứng minh đẳng thức hình học. Hãy nắm vững kiến thức đã học trong những năn học Toán THCS để phục vụ cho lời giải nhé!

Chúc các em đạt kết quả cao trong học tập!

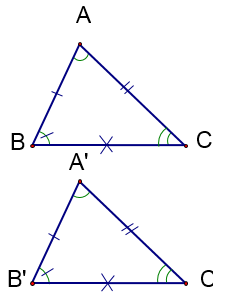
# **🗁. LÝ THUYẾT CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC**

# **A. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU**

## **Phương pháp 1: Hai tam giác bằng nhau**

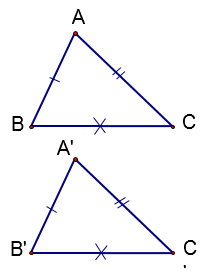
Lấy một tờ bìa mỏng, gấp đôi lại. Trên nửa tờ bìa vẽ một tam giác. Vẫn gấp đôi tờ bìa, cắt lấy tam giác, ta được hai miếng tam giác có thể đặt trùng khít lên nhau. Đó là hình ảnh của hai tam giác bằng nhau.





***a) Định nghĩa:*** *Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.*

**

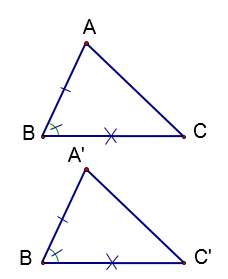


***b) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác***

***\*) Trường hợp 1:*** *Cạnh - Cạnh - Cạnh* ***(c.c.c)***

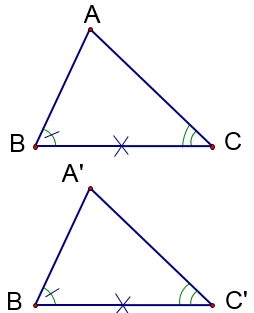
*- Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau*

**

***\*) Trường hợp 2:*** *Cạnh - Góc - Cạnh* ***(c.g.c)***

*- Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau*

**



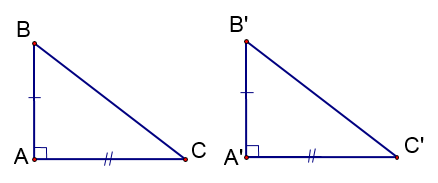
***\*) Trường hợp 3:*** *Góc - Cạnh - Góc* ***(g.c.g)***

*- Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau*

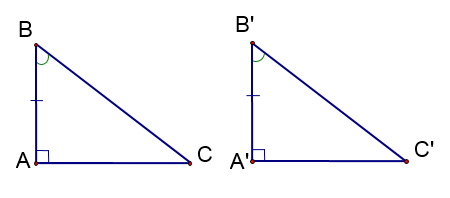
**

***c) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông***

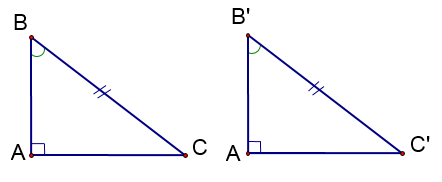
* ***Trường hợp 1:*** *Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



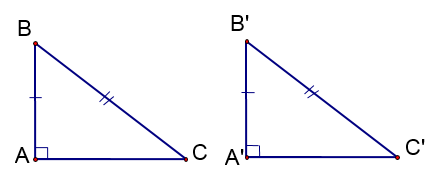
* ***Trường hợp 2****: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai giác vuông đó bằng nhau.*



* ***Trường hợp 3:*** *Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



* ***Trường hợp 4:*** *Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.*



## **Phương pháp 2: Sử dụng tính chất của các hình đặc biệt**

**(***chỉ khai thác yếu tố bằng nhau, tránh nhầm sang dấu hiệu nhận biết)*

1. Hai cạnh bên của tam giác cân, tam giác đều. (Hình học lớp 7)

***Tam giác cân****: Hai cạnh bên của tam giác cân bằng nhau.*

***Tam giác đều:*** *Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau.*

2. Sử dụng tính chất về cạnh và đường chéo của các tứ giác đặc biệt: hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi. (Hình học lớp 8)

***Hình thang cân****: Hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau.*

***Hình bình hành****: Hai cặp cạnh đối bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

***Hình chữ nhật:*** *Hai cặp cạnh đối bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

***Hình vuông:*** *Bốn cạnh bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau, giao điểm của hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

***Hình thoi****: Bốn cạnh bằng nhau, giao điểm của hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |
|  |  | |  |
|  |  | |  |
|  |  | | |
|  |  | PA, PB là tiếp tuyến của (O)  PA = PB | |

## **Phương pháp 3: Sử dụng tính chất của các đường đặc biệt, điểm đặc biệt.**

1. Sử dụng tính chất đường trung tuyến (*đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác*), đường trung tuyến của tam giác vuông, đường trung bình trong tam giác, các đường đồng quy trong tam giác đặc biệt.

+ *Trung tuyến của một tam giác là một đoạn thẳng nối từ đỉnh của tam giác tới trung điểm của cạnh đối diện*

+ *Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.*

*- “Đường thẳng xuất phát từ một đỉnh và đi qua trọng tâm của một tam giác là đường trung tuyến của tam giác đó”  đi qua trung điểm cạnh đối diện.*

*-* Về các đường đồng quy trong tam giác đặc biệt*: ví dụ: 2 đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên của tam giác cân bằng nhau, các đường trung tuyến trong tam giác đều bằng nhau, ….. (*phần này khi sử dụng phải chứng minh*)*

*+ Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.*

***Định lí 1****: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.*

2. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

*- Điểm nằm trên tia phân giác thì cách đều 2 cạnh của góc đó*

3. Khoảng cách từ một điểm trên đường trung trực của một đoạn thẳng đến hai đầu đoạn thẳng. (Hình học 7):

- ***Định lý thuận****: Điểm nằm trên*đường trung trực*của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.*

*Nếu điểm M nằm trên*đường trung trực*của đoạn thẳng AB thì MA = MB*

4. Sử dụng tính chất trung điểm. (Hình học 7)

- ***Trung điểm****là điểm nằm chính giữa đoạn thẳng, chia đoạn thẳng ra làm hai đoạn dài bằng nhau.*

5. Hình chiếu của hai đường xiên bằng nhau và ngược lại. (Hình học 7)

- *Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.*

## **Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất liên quan đến đường tròn.**

1. Sử dụng tính chất hai dây cách đều tâm trong đường tròn. (Hình học 9)

- *Trong một đường tròn: Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau*

2. Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến giao nhau trong đường tròn. (Hình học 9)

- *Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cách đều hai tiếp điểm*

3. Sử dụng quan hệ giữa cung và dây cung trong một đường tròn. (Hình học 9)

- *Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau: Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau*

## **Phương pháp 5: Sử dụng tỉ số, đoạn thẳng trung gian …**

1. Dùng tính chất bắc cầu: Hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thẳng thứ ba.

2. Có cùng độ dài (*cùng số đo*) hoặc cùng nghiệm đúng một hệ thức.

3. Đường thẳng song song cách đều:

*- Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thằng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.*

3. Sử dụng tính chất của các đẳng thức, hai phân số bằng nhau.

4. Sử dụng kiến thức về diện tích. (Hình học 8)

5. Sử dụng bình phương của chúng bằng nhau (*có thể sử dụng định lí Pitago, tam giác đồng dạng, hệ thức lượng trong tam giác, trong đường tròn để đưa về bình phương của chúng bằng nhau*).

# **B. CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ**

## **1. Tính chất trung điểm của đoạn thẳng**

***Trung điểm****là điểm nằm chính giữa đoạn thẳng, chia đoạn thẳng ra làm hai đoạn dài bằng nhau.*

B là trung điểm của đoạn thẳng AC

****

******

**2. Tính chất ba đường trung tuyến trong tam giác**

*Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy:***

*G là trọng tâm của tam giác ABC*

**Khai thác thêm:**

**

**

**

## **3. Đường trung bình.**

• Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác (h.3.1).

• Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang (h.3.2).

Description: 3 Description: 3

*Hình 3.1 Hình 3.2*

**Tính chất**

• Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Trên hình 3.1 thì MN // BC và 

• Đường trung bình của hình thang thì song song với hai cạnh đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

Trên hình 3.2 thì MN // AB // CD và 

**Định lí**

• Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

• Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.

## **4. Định lý Talet:**

**Tỉ số của hai đoạn thẳng**.Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

**Đoạn thẳng tỉ lệ**. Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng  và  nếu có tỉ lệ thức  hay 

**Định lí Ta-lét trong tam giác**. Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

 Trong hình bên



***Định lí Ta-lét đảo****.* Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác .

Trong hình bên

.

***Hệ quả của định lí Ta-lét*.** Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Trong hình trên: 

\* ***Chú ý***. Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại .





## **5. Tính chất đường phân giác của tam giác.**

**Định lý**

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỷ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.



**Chú ý**

Định lý vẫn đúng đối đường phân giác góc ngoài của tam giác.



Các định lý trên có định lý đảo

⇒ AD là đường phân giác trong của tam giác.

⇒ AE là đường phân giác ngoài của tam giác.

## **6. Các trường hợp đồng dạng của tam giác**

**Khái niệm hai tam giác đồng dạng**

*a. Định nghĩa*

gọi là đồng dạng với ABC nếu : ;

.

*b. Tính chất*

- Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.

- Nếu thì 

- Nếu  và  thì 

*c. Định lí*

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.



***Chú ý***. Định lí cũng đúng cho trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

**Trường hợp đồng dạng thứ nhất**

 Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu ABC và có:

**Trường hợp đồng dạng thứ hai**

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đồng dạng.

Nếu ABC và có:

 và 

thì .

**Trường hợp đồng dạng thứ ba**

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Nếu ABC và có:



thì 

## **7. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 1. *a2 = b2 + c2* 2. *b2 = a.b*′ 3. *c2 = a.c*′ 4. *h2 = b*′.*c*′ 5. *h.a = b.c* |

## 

## **8. Tỉ số lượng giác của góc nhọn.**

🞄 Các tỉ số lượng giác của góc nhọn  (hình) được định nghĩa như sau:



+ Nếu  là một góc nhọn thì





🞄 Với hai góc  mà ,

ta có:  .

🞄 Nếu hai góc nhọn  và  có  hoặc  thì .

 .

🞄 Với một số góc đặc biệt ta có: ; .

Dạng toán đẳng thức hình học là một dạng toán cũng không khó nhưng nó đòi hỏi người giải phải có cái nhìn nhanh (tiết kiệm thời gian) và chuẩn (giải đúng kiếm điểm), xác định đúng phương pháp vô cùng quan trọng. Chính vì vậy việc tự luyện giải nhiều bài toán hình học sẽ giúp cho các em có kỹ năng giải. Hãy cùng bắt đầu với các bài tập ^^.

# **🗁. PHẦN BÀI TẬP.**

**Bài 1: (Một bài nhẹ nhàng để bắt đầu)** Cho đ­ường tròn (O) đ­ường kính AB = 2R và C là một điểm thuộc đ­ường tròn  . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C , kẻ tia Ax tiếp xúc với đ­ường tròn (O), gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC . Tia BC cắt Ax tại Q , tia AM cắt BC tại N.

Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân .

**Hướng dẫn giải**

a) Xét  và .

Ta có: AB là đư­ờng kính của đ­ường tròn (O)

nên :.

M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC

nên . Tam giác ABN có MB vừa là đường cao, đồng thời là đường phân giác nên =>  cân đỉnh B.

. Tứ giác AMCB nội tiếp.

=>  ( cùng bù với  ).

=>  ( cùng bằng  ).

=> Tam giác MCN cân đỉnh M

**Bài 2:** Cho điểm  nằm ngoài đường tròn . Vẽ các tiếp tuyến ,  với đường tròn (,  là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến  không đi qua tâm  ( nằm giữa  và ), cắt  và  lần lượt tại  và . Chứng minh:

a/  nội tiếp.

b/

c/

d/  là tia phân giác của góc .

**Hướng dẫn giải**

a/ Ta có: 

Tứ giác nội tiếp

b/ Ta có:  chung

 (cùng chắn cung AC)

 đồng dạng 



c/ Ta có: 

 cân tại O

Mà là đường phân giác nên cũng là đường cao





Ta lại có: 





d/ Từ 

   (\*)

Xét  có:

 và  chung

 đồng dạng     (1)

Ta lại có  (cùng chắn hai cung bằng nhau)  là phân giác của .

Theo t/c đường phân giác của tam giác, ta có:  (2)

 và  có  chung và  do đó đồng dạng (g.g)  (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra  suy ra  là tia phân giác của góc .

**Bài 3:** Cho đường tròn tâm , đường kính . Trên tiếp tuyến của đường tròn  tại  lấy điểm  . Từ  vẽ tiếp tuyến thứ hai  với  ( là tiếp điểm). Kẻ vuông góc với ,  cắt  tại điểm thứ hai là  và cắt tại . Chứng minh rằng:

a/ nội tiếp.

b/.

c/ .

d/  là trung điểm của .

**Hướng dẫn giải**

a/ Ta có:



Vậy tứ giác  nội tiếp.

b/ Ta có: 

 chung

 đồng dạng 



c/ Ta có: 







Mà  nên 

d/ Ta có:  

 (1)

Ta lại có:   cân tại  







 cân tại .

 mà  nên  (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

Vậy  là trung điểm .

**Bài 4:** Cho đường tròn , từ một điểm  nằm ngoài đường tròn , vẽ hai tia tiếp tuyến  và  với đường tròn. Kẻ dây . Nối  cắt đường tròn  tại . Chứng minh:

a/  nội tiếp.

b/

c/  cân.

d/  kéo dài cắt  ở . Chứng minh .

**Hướng dẫn giải**

a/ Ta có:



Vậy  là tứ giác nội tiếp

b/ Ta có: 

 chung

 đồng dạng .



c/ Ta có:  

 (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)



Vậy  cân tại .

d/ Ta có:   mà  nên 

 chung

 đồng dạng 



Ta lại có: 

 chung

 đồng dạng 



Mặt khác:  nên .

**Bài 5:** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn . Gọi  là giao điểm  và . Kẻ  vuông góc với ;  vuông góc với  ().

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng .

c) Chứng minh rằng tam giác  và tam giác  đồng dạng.

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp đường tròn.

Xét tứ giác  có:



 Tứ giác  nội tiếp.

b) Chứng minh rằng .

Xét và  có:

 (2 góc nội tiếp cùng chắn cung  của )

 (2 góc đối đỉnh)

  (g.g)



c) Chứng minh rằng tam giác  và tam giác  đồng dạng.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác  có

 (2 góc nội tiếp cùng chắn cung )

Mà 

Chứng minh tương tự, ta được 

 và  có: 

  (g.g)

**Bài 6:** Cho  có ba góc nhọn. Đường tròn  đường kính  cắt các cạnh lần lượt tại các điểm  và  Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và 

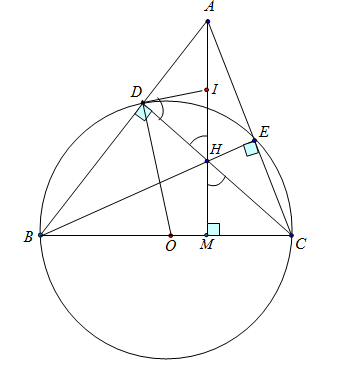
a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp trong một đường tròn. Xác định tâm  của đường tròn này.

b) Gọi  là giao điểm của  và  Chứng minh 

c) Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn 

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp trong một đường tròn. Xác định tâm  của đường tròn này.

Ta có :  (chắn nửa đường tròn)

 (chắn nửa đường tròn)

Suy ra : 

Xét tứ giác  có:



Tứ giác  có hai góc đối bù nhau.

Vậy tứ giác  nội tiếp trong một đường tròn.

Tâm  là trung điểm cạnh 

b) Chứng minh 

Xét hai tam giác  và  có :

là góc chung

 (chứng minh trên)

Suy ra hai tam giác  và đồng dạng



c) Chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn 

Ta có :  (do  cân tại ) 

 (đối đỉnh) 

Mặt khác :  (do  cân tại ) 

Ngoài ra, trong tam giác vuông MHC có :

Từ  suy ra: 

Suy ra : 

Vậy  là tiếp tuyến của 

**Bài 7:** Cho  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn . Đường cao  của  cắt đường tròn  tại . Từ  kẻ  tại .

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp được đường tròn.

b) Kẻ đường cao  của . Chứng minh: .

c) Chứng minh: .

d) Chứng minh: .

**Hướng dẫn giải**

a) Xét tứ giác , ta có:

 (gt)

 (gt)



Vậy tứ giác  nội tiếp được đường tròn.

b) Ta có: tứ giác  nội tiếp đường tròn .

 (cùng bù )

c) Ta có: 

Mà:  (câu b)

d) Ta có:  

Lại có:  



Từ  và  

**Bài 8:** Cho nửa đường tròn  đường kính , dây cung . Gọi  là điểm chính giữa cung . Đường thẳng kẻ từ  song song với  cắt tia  ở và cắt tia  ở ,  cắt  tại .

1. Chứng minh tứ giác  nội tiếp.

2. Chứng minh  và 

3. Xác định vị trí điểm  trên nửa đường tròn  để  là tiếp tuyến của nửa

đường tròn.

**Hướng dẫn giải**

1. Chứng minh tứ giác  nội tiếp.

Có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)



Mà  (gt) nên . Vậy.

Lại có  (gt) .

Tứ giác  có nên tứ giác nội tiếp trong một đường tròn.

2. Chứng minh  và 

Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó , mà  (gt) nên tứ giác  là hình bình hành.

Suy ra:  và .

3. Xác định vị trí điểm  trên nửa đường tròn để  là tiếp tuyến của nửa

đường tròn.

 là tiếp tuyến của đường tròn   có  và 

nên  là trực tâm tam giác. Suy ra .

Vậy 

Mà  nên . Vậy tam giác OBC đều.

Vậy điểm C là điểm thuộc nửa đường tròn sao cho 

**Bài 9:** Cho đường tròn tâm  đường kính ,  là một điểm nằm trên đoạn thẳng  ( khác  và ). Đường thẳng đi qua  và vuông góc với  cắt  tại .Trên tia  lấy  nằm ngoài . Đường thẳng  cắt  tại điểm  khác , đường thẳng  cắt  tại điểm  khác .Gọi  là giao điểm của  và. Chứng minh:

a) Tứ giác  nội tiếp. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp đó.

b) Các tam giác  và  đồng dạng với nhau.

c) .

d) Khi  thay đổi trên, đường thẳng  luôn đi qua một điểm cố định.

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có 

Vậy tứ giác  nội tiếp đường tròn, tâm của đường tròn là trung điểm của .

b) 

Vì là góc chung và 

c)   (1)

 (g-g) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: .

d)  là trực tâm của tam giác  nên 

Vì nên  ba điểm  thẳng hàng.

Do  cố định nên  luôn đi qua điểm  cố định.

**Bài 10:** Cho đường tròn tâm  bán kính , hai đường kính  và  vuông góc với nhau. Trên đoạn  lấy điểm  khác , đường thẳng  cắt đường tròn tại . Đường thẳng vuông góc với  tại  cắt tiếp tuyến với dường tròn tại  ở điểm .

a) Chứng minh: Tứ giác  nội tiếp.

b) Chứng minh: , suy ra  là hình chữ nhật.

c) Chứng minh: .

d) Tính tích theo .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  cùng thuộc đường tròn đường kính .

Vậy tứ giác  nội tiếp.

b) Ta có:  ( tứ giác  nội tiếp)

 ( tam giác  cân tại )





Ta có ;  (cùng vuông góc với )

 là hình bình hành

Mặt khác:  nên là hình chữ nhật

c) Ta có: .

d) 

**Bài 11:** Cho đường tròn  và dây , vẽ đường kính  vuông góc với  tại  ( thuộc cung nhỏ ). Lấy điểm  thuộc cung nhỏ ,  cắt  tại .

a. Chứng minh tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh:.

c. Tia cắt đường thẳng  tại . Tiếp tuyến tại của  cắt  tại . Chứng minh:

d. Chứng minh: .

**Hướng dẫn giải**

a) Vì ;

Mà  (Góc n.tiếp chắn nửa đường tròn )

Tứ giác  nội tiếp

b) Ta có  (Do )

và (Pitago trong tam giác vuông ADC có AK đường cao)

Suy ra: .

c) cân tại  (1)

Mà ;  ( Vì vuông tại )

Mặt khác theo c/m trên:  cân tại ;

Từ (1) và (2) suy ra: .

d) Ta có  (T/c đường kính vuông góc dây cung)

Ta có: .

Mà (Pitago trong tam giác vuông có  là đường cao)



.

**Bài 12**: Cho tam giác  vuông tại  và đường cao . Dựng đường tròn tâm  đường kính  cắt  tại , cắt tại . Các tiếp tuyến với đường tròn  tại ,  lần lượt cắt cạnh  tại  và .

a) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp

b) Chứng minh rằng 

c) Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

d) Cho , . Tính diện tích .

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp

Ta có: (là tiếp tuyến của )

(là đường cao)



Vậy tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng 

Xét vuông tại  và vuông tại  có:

 chung

Vậy 

 hay 

c) Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Ta có: 

Suy ra tứ giác  là hình chữ nhật

Suy ra  là hai đường chéo

Mà  là trung điểm của nên  cũng là trung điểm của 

Vậy ba điểm  thẳng hàng.

d) Cho , . Tính diện tích .

Ta có  là đường trung bình của  nên 

Tương tự, ta cũng có 

 là tia phân giác của  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)



Tương tự ta có 

Mặt khác  (kề bù)

Suy ra   vuông tại .



**Bài 13:** Cho tam giác vuông cân tại , nội tiếp trong đường tròn tâm . Tiếp tuyến tại  với đường tròn  cắt tia  tại . Trên cạnh  lấy điểm  ( không trùng với  và ). Tia  cắt đường tròn  tại  và cắt  tại . Tia cắt  tại .

a) Chứng minh .

b) Chứng minh tứ giác nội tiếp.

c) Tia cắt tại . Tứ giác  là hình gì?

d) Chứng minh .

**Hướng dẫn giải****

a) Chứng minh .

Ta có: 

( cùng chắn cung )

Vậy (g.g).

b) Chứng minh tứ giác nội tiếp.

Do  vuông cân tại  nên 

 (cùng chắn cung )

 vuông cân tại có 



Lại có (kề bù)

. Vậy tứ giác  nội tiếp

c) Tứ giác  là hình gì?

Ta có  là trực tâm của  

(vì cùng vuông góc với )

Từ  suy ra tứ giác  là hình thang vuông.

d) Chứng minh 

Ta có:  

Cộng  và  

Vậy .

**Bài 14:** Cho đường tròn và hai đường kính  bất kì. Tiếp tuyến tại  của đường tròn  cắt các đường thẳng  và  lần lượt tại . Gọi  lần lượt là trung điểm của các đường thẳng .

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp.

b) Chứng minh rằng  và 

c) Chứng minh rằng trực tâm của tam giác  là trung điểm của đoạn thẳng 

d) Hai đường kính  và  có vị trí như thế nào thì tam giác  có diện tích nhỏ nhất? Tính diện tích nhỏ nhất đó theo 

**Hướng dẫn giải**



a) Tứ giác  nội tiếp

 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

 (vì cùng phụ )

 có  nên  cân tại 

Suy ra:  tứ giác  nội tiếp (có góc trong bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện)

b)  và 

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:

 và 



Do đó 

Ta lại có: 

Vậy: 

c)  là trung điểm 

Kẻ  và  cắt  tại  là trực tâm của .

Ta có: 



Mà  (cùng phụ với )

 mà hai góc ở vị trí đồng vị nên 

Trong  có: 

**Bài 15:** Cho đường tròn  đường kính dây cung của vuông góc với tại  sao cho . Trên đoạn  lấy điểm . Tia  cắt đường tròn tại điểm thứ hai là 

a) Chứng minh tứ giác  nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh 

c) Chứng minh 

d) Xác định vị trí điểm  sao cho chu vi  đạt giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

a) Tứ giác  nội tiếp.

Ta có:  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



Tứ giác nội tiếp được đường tròn.

b) 

Ta có:  tại 

 (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

 và có: 



c) 

 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có: 

Do đó:

**Bài 16:** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E (khác với điểm A). Tiếp tuyến kẻ từ điểm E cắt các tiếp tuyến kẻ từ điểm A và B của nửa đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm E.

a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

**Hướng dẫn giải**

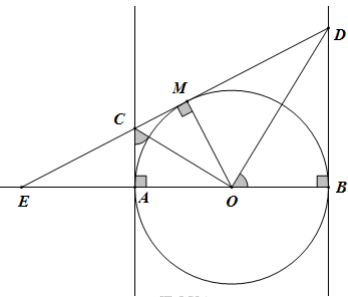
a) Chứng minh rằng tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

Vì AC là tiếp tuyến của (O) nên OA ⊥ AC => 

Vì MC là tiếp tuyến của (O) nên OM ⊥ MC => 

=>  Suy ra OACM là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng

Xét hai tam giác vuông OAC và OMC có



(cạnh huyền – cạnh góc vuông)

⇒ CA = CM  .

Tương tự ta có 

Mà AC // BD (cùng vuông góc AB) nên

c) Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi trên tia đối của tia AB, tích AC.BD không đổi.

Vì 

Tương tự: 

Suy ra

Mà 

 (không đổi, đpcm)

***Hết***